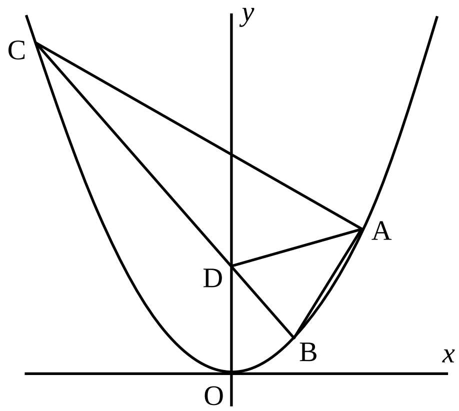
数学 類題にチャレンジ 〔関数と面積 問題編〕

【類 題 1】

aを正の数とします。右の図で，曲線は$y=ax^2$のグラフです。この曲線上にx座標が4である点A，x座標が2である点B，x座標が負である点Cをそれぞれとります。また，線分BCとy軸との交点をDとします。△ACDの面積が△ABDの面積の3倍となるとき，次の各問いに答えなさい。

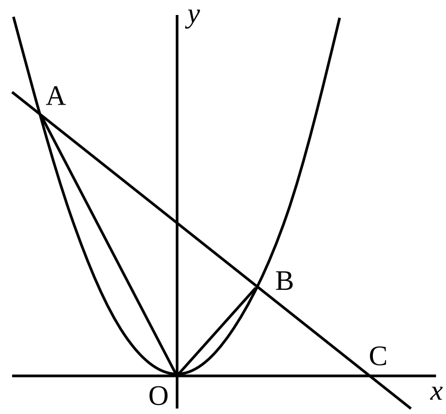


（1） 点Cのx座標を求めなさい。

（2） 点Dのy座標が4のとき，aの値を求めなさい。

【類 題 2】

aを正の数とします。右の図で，曲線は$y=ax^2$のグラフです。この曲線上に，x座標が負である点Aと，座標が$(2,\ 2)$である点Bをとります。また，直線ABとx軸との交点をCとします。△OABの面積と△OBCの面積の比が3:2となるとき，次の各問いに答えなさい。



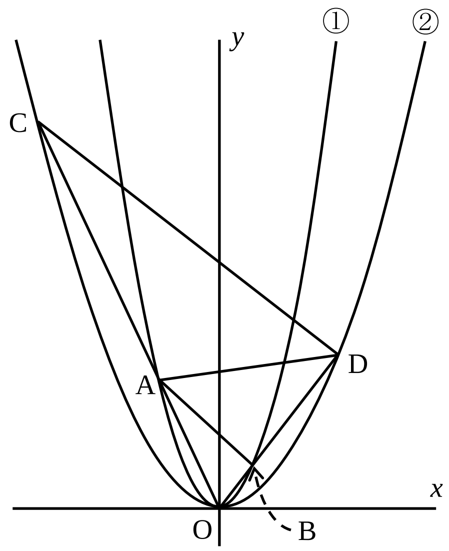
（1） aの値を求めなさい。

（2） 点Aの座標を求めなさい。

（3） 点Cのx座標を求めなさい。

【類 題　3】

　a を 1 より小さい正の数とします。右の図で，曲線①，②はそれぞれ $y=x^2$，$y=ax^2$ のグラフです。曲線①上に x 座標がそれぞれ-2，1 である点 A，B をとります。また，直線 OA，OB と曲線②との交点をそれぞれ C，D とします。△ABD の面積が△OAB の面積の 2 倍となるとき，次の各問いに答えなさい。ただし，座標の 1 目盛りを 1cm とします。



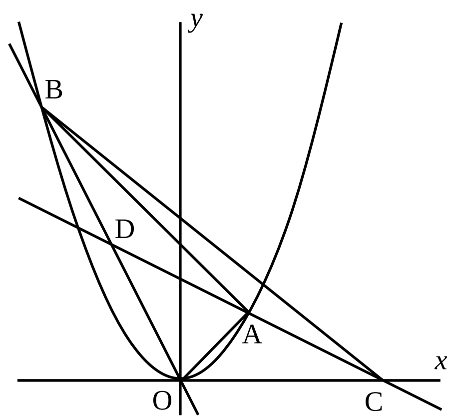
（1）　△OAB の面積を求めなさい。

（2）　a の値を求めなさい。

（3）　四角形 ABDC の面積を求めなさい。

【類 題　4】

　右の図で，曲線は $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフです。この曲線上に x 座標が 2 である点 A と x 座標が負である点 B をとり，x 軸上に x 座標が 6 である点 C をとります。また，直線 AC と直線 OB との交点を D とします。このとき，次の各問いに答えなさい。



（1）　直線 AC の式を求めなさい。

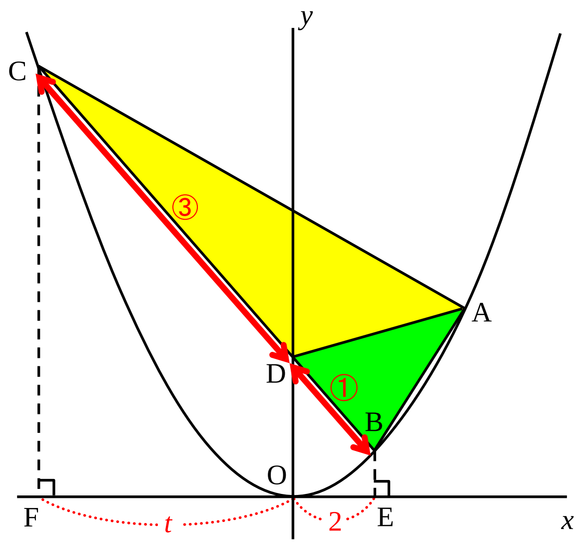
（2）　線分 AD が△OAB の面積を二等分するとき，次の①，②に答えなさい。

　①　点 B の座標を求めなさい。

　②　△ABC の面積を求めなさい。

数学 類題にチャレンジ 〔関数と面積 解答編〕

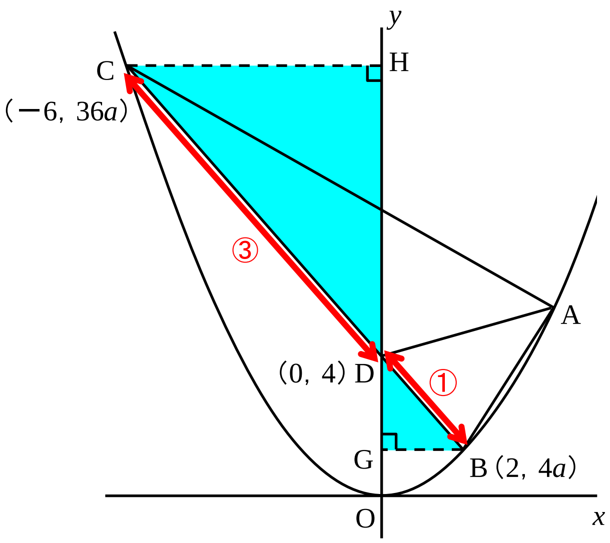
【類題 1】



（1）△ACD の面積が△ABD の面積の 3 倍だから，CD : DB＝3 : 1 となります。点 B，C から x 軸に垂線 BE，CF を下ろすと，平行線と線分の比より FO : OE＝CD : DB が成り立ちます。点 E の x 座標は 2 だから，FO＝t とおくと，

$t : 2 = 3 : 1$

これを解くと $t=6$ と分かります。よって，点 C の x 座標は $\boxed{-6}$ です。



（2）関数の式 $y=ax^2$ に x 座標を代入することで，点 B，C の y 座標はそれぞれ

$a\times 2^2=4a$，$a\times(-6)^2=36a$

と表せます。点 B，C から y 軸に垂線 BG，CH を下ろすと，y 軸上の線分の長さは y 座標の差だから，

HD＝$36a-4$，DG＝$4-4a$

と表せます。△CHD∽△BGD で，相似比は 3 : 1 だから，

$(36a-4):(4-4a)=3:1$

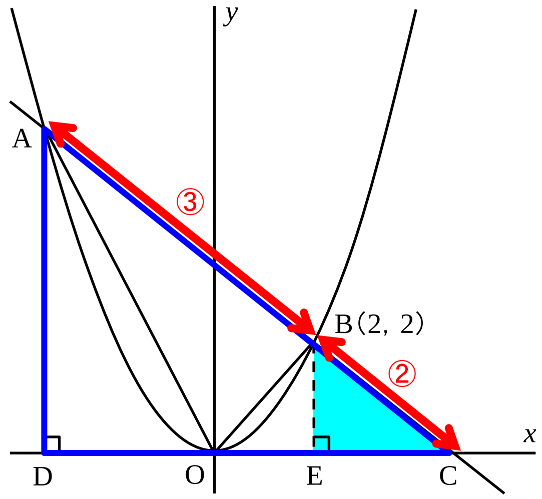
これを解いて，$\boxed{a=\frac{1}{3}}$

【類題 2】

(1) 点 B の座標 (2, 2) を $y=ax^2$ に代入します。

$2=a\times 2^2$

これを解いて, $\boxed{a=\frac{1}{2}}$



(2) △OAB と△OBC の面積の比が 3:2 だから, AB:BC＝3:2 となります。点 A, B から x 軸に垂線 AD, BE を下ろすと,

△ADC∽△BEC になります。その相似比は BC:AC＝2:5 です。BE＝2 より,

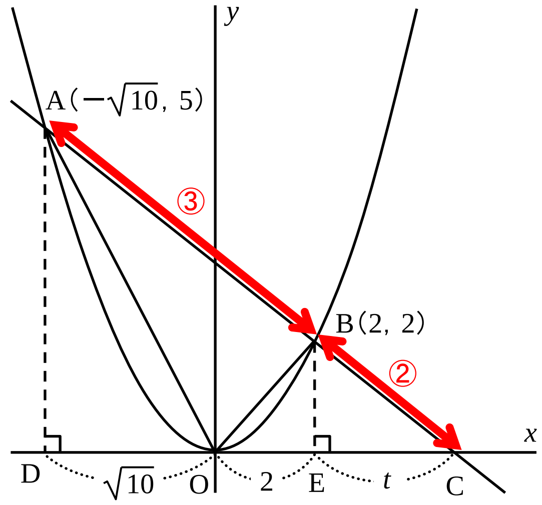
2:AD＝2:5

よって AD＝5 と分かり, これが点 A の y 座標です。これを $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して,

$5=\frac{1}{2}x^2$

この方程式を解くと $x=\pm\sqrt{10}$ という解が得られますが, 点 A の x 座標は負の数なので $-\sqrt{10}$ です。

よって点 A の座標は $\boxed{(-\sqrt{10},\ 5)}$ です。



(3) 平行線と線分の比より,

CE:ED＝CB:BA＝2:3

が成り立ちます。OE＝2, OD＝$\sqrt{10}$ だから, CE＝t とおくと

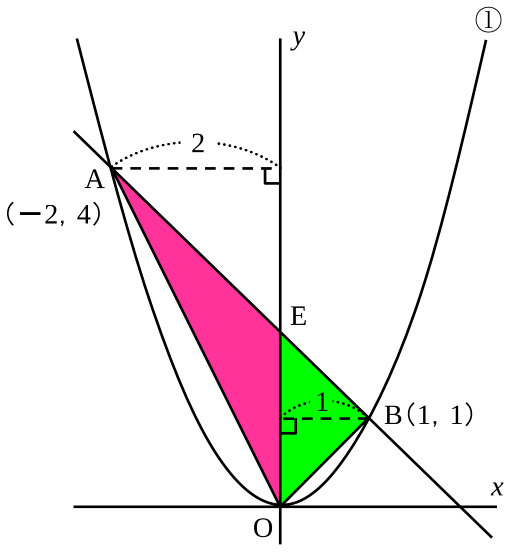
$t:(\sqrt{10}+2)=2:3$

これを解いて, $t=\frac{2\sqrt{10}+4}{3}$ と分かります。

よって点 C の x 座標は

$2+\frac{2\sqrt{10}+4}{3}=\boxed{\frac{2\sqrt{10}+10}{3}}$

【類題 3】



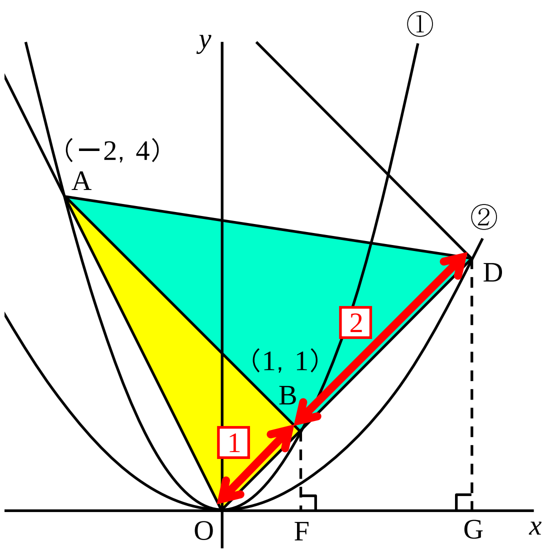
(1) 点 A, B の y 座標はそれぞれ $(-2)^2=4$, $1^2=1$ です。直線 AB の式を $y=bx+c$ とおき, 2 点 A, B の座標を代入することで, 次の連立方程式が得られます。

$$\begin{cases} 4=-2b+c \\ 1=b+c \end{cases}$$

これを解いて, $b=-1$, $c=2$ と分かります。

直線 AB と y 軸との交点を E とすると, 点 E の y 座標は 2 だから OE＝2cm です。よって,

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \triangle OAE+\triangle OBE \\ &= 2\times 2\times\frac{1}{2}+2\times 1\times\frac{1}{2} \\ &= \boxed{3(\text{cm}^2)} \end{aligned}$$



(2) △ABD の面積が △OAB の面積の 2 倍だから, OB : BD＝1 : 2 となります。点 B, D から x 軸に垂線 BF, DG を下ろすと, 平行線と線分の比より OF : FG＝1 : 2 と分かります。

OF＝1 だから,

FG＝2, OG＝1＋2＝3

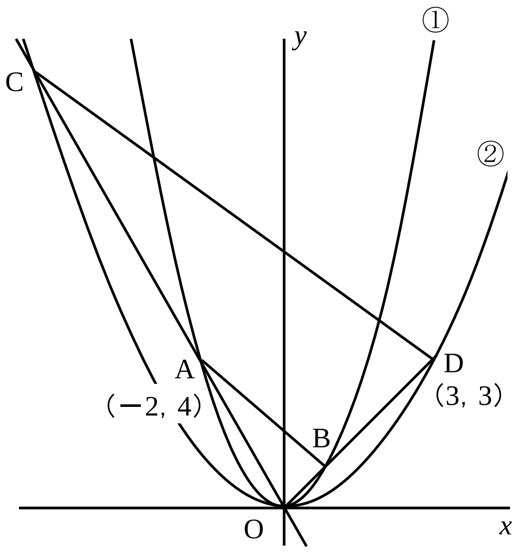
となり, 点 D の x 座標は 3 と分かります。

同様に y 軸に垂線を下ろすことで, 点 D の y 座標も 3 であることが分かります。

以上より, 点 D の座標は (3, 3) です。これを $y=ax^2$ に代入して,

$3=a\times 3^2$

これを解いて, $\boxed{a=\frac{1}{3}}$



(3) まず点 C の x 座標を求めます。
直線 OA の式を $y=mx$ とおきます。点 A の座標 (−2, 4) を代入して,

$4=-2m$

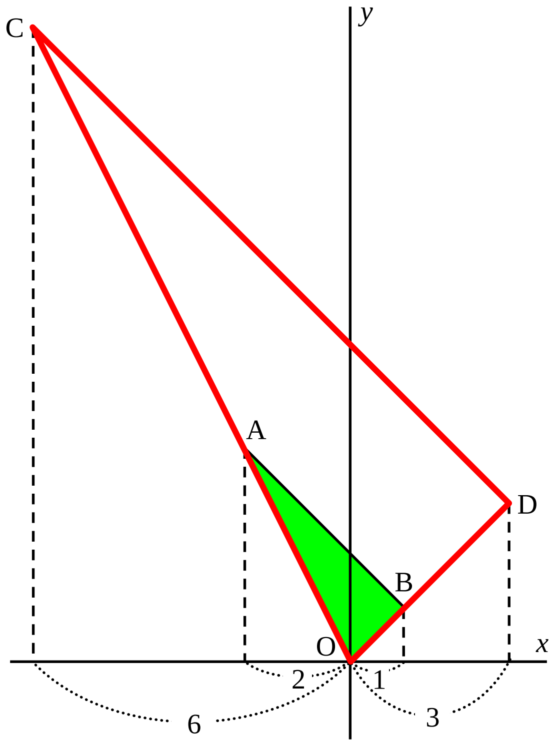
これを解いて $m=-2$ と分かるので，直線 OA の式は $y=-2x$ です。
点 C は放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ と直線 $y=-2x$ との交点です。よって，この二式を連立方程式にして解けば点 C の座標が分かります。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=-2x \end{cases}$$

代入法を用いることで，次のような二次方程式が得られます。

$\frac{1}{3}x^2=-2x$

この方程式を解くと $x=-6,\ 0$ という解が得られますが，点 C の x 座標は負の数なので −6 です。



4 点 A, B, C, D から x 軸に垂線を下ろすことで，平行線と線分の比を用いて以下のように辺の比が分かります。

OA : OC = 2 : 6 = 1 : 3，OB : OD = 1 : 3

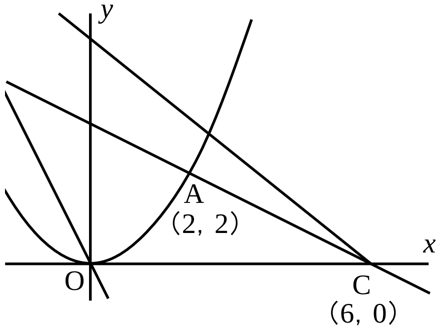
さらに∠AOB = ∠COD だから，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいため，
△OAB∽△OCD が成り立ちます。相似比は 1 : 3 だから，面積比は $1^2:3^2=1:9$ です。(1) より△OAB = 3cm² なので,

△OCD = 3 × 9 = 27 (cm²)

よって四角形 ABDC の面積は，

27 − 3 = $\boxed{24\ (\mathrm{cm}^2)}$

【類題 4】

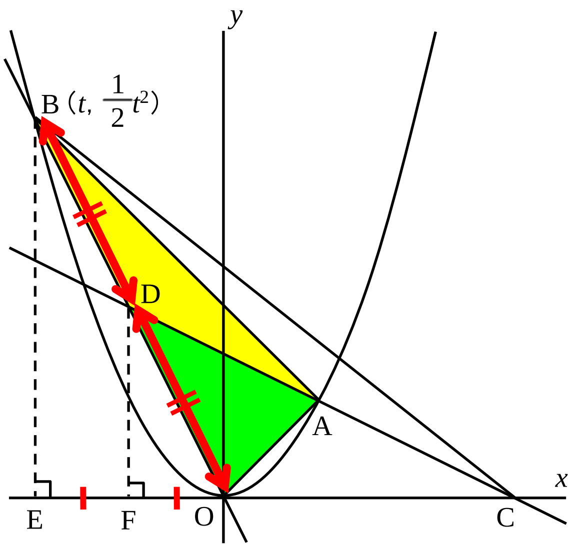


(1) 点 A の y 座標は $\frac{1}{2}\times 2^2 = 2$ です。直線 AC の式を $y=ax+b$ とおき，2 点 A，C の座標を代入することで，次の連立方程式が得られます。

$$\begin{cases} 2=2a+b \\ 0=6a+b \end{cases}$$

これを解いて，$a=-\frac{1}{2}$，$b=3$ と分かります。

よって，直線 AC の式は $\boxed{y=-\frac{1}{2}x+3}$ です。



(2) ①点 B の x 座標を t とおくと，y 座標は $\frac{1}{2}\times t^2=\frac{1}{2}t^2$ と表せます。…①

△ABD と△AOD の面積が等しくなるので，BD＝OD となります。点 B，D から x 軸に垂線 BE，DF を下ろすと，平行線と線分の比より EF＝OF だと分かります。すなわち，OF$=\frac{1}{2}$OE です。よって，点 D の x 座標は点 B の x 座標の $\frac{1}{2}$ になります。同様に，点 D の y 座標も点 B の y 座標の $\frac{1}{2}$ です。よって，点 D の座標は

$$\left(t\times\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t^2\times\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$$

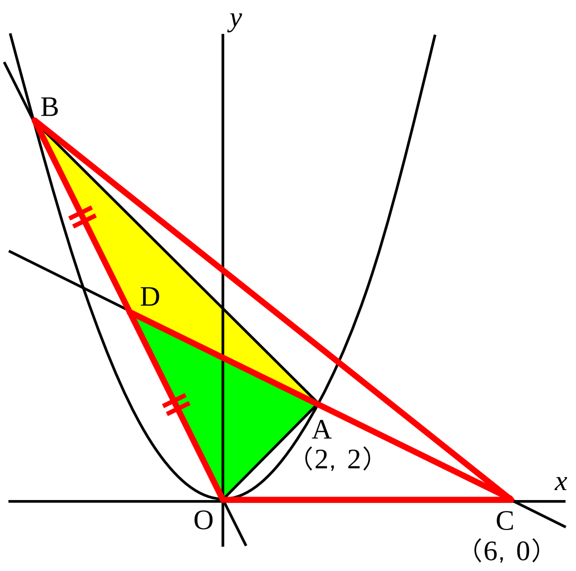
と表せます。この点が直線 AC 上にあるため，直線 AC の式 $y=-\frac{1}{2}x+3$ に代入します。

$$\frac{1}{4}t^2=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}t+3$$

これを解くと $t=-4$，3 という解が得られますが，点 B の x 座標は負の数だから -4 です。これを①に代入して、

$$\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$$

よって，点 B の座標は $\boxed{(-4,\ 8)}$ です。



（2）② BD＝OD だから，△CBD＝△COD，

△ABD＝△AOD です。左辺，右辺それぞれの差をとることで，

△CBD－△ABD＝△COD－△AOD

すなわち△ABC＝△AOC が成り立ちます。

△AOC＝$6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6\mathrm{cm}^2$

だから，△ABC＝ $\boxed{6\mathrm{cm}^2}$ です。