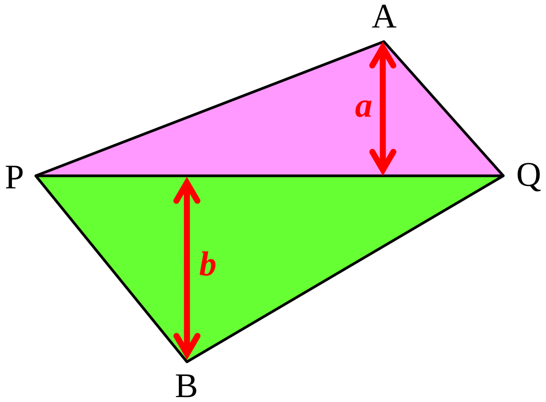
埼玉県公立高校入試問題　解説

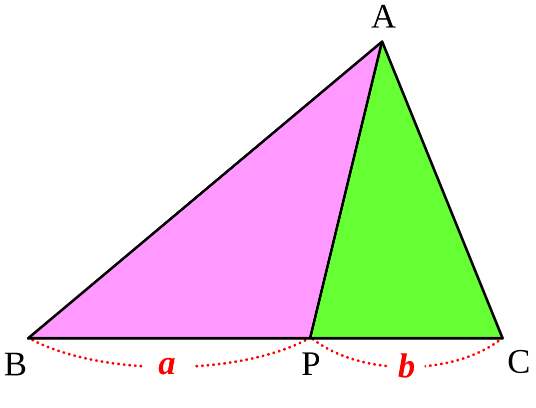
公立入試必勝ポイント

①底辺の等しい三角形の面積比は，高さの比に等しい。



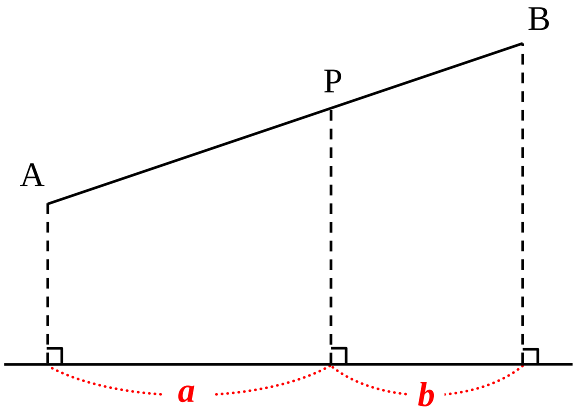
左の図において，
（ピンク）と（緑）の面積比は
a：*b* に等しい。

②高さの等しい三角形の面積比は，底辺の比に等しい。



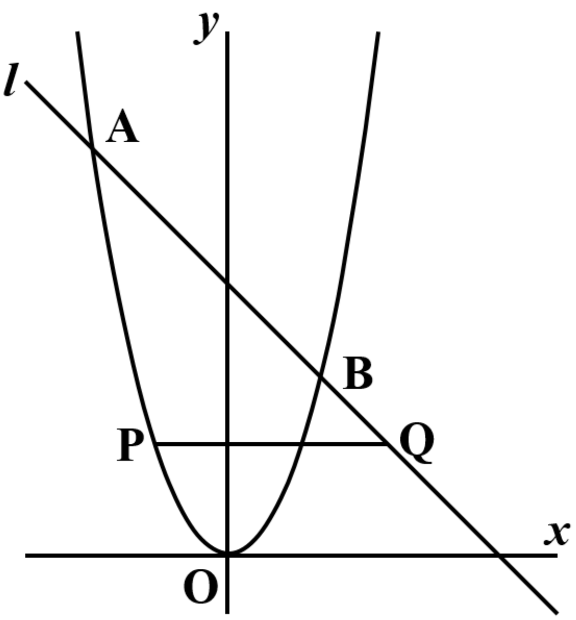
左の図において，
（ピンク）と（緑）の面積比は
a：*b* に等しい。

③軸に平行でない線分の比は，軸に垂線を下ろして考える。



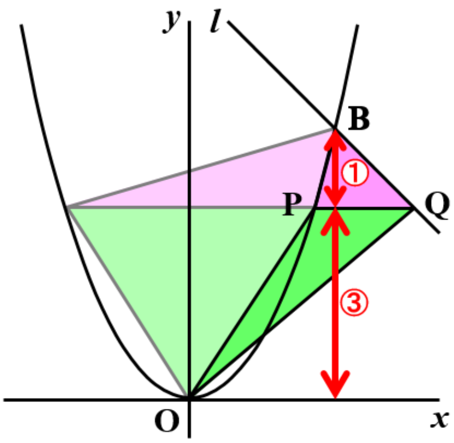
左の図において，
AP：BP＝*a*：*b*

令和 2 年度　学力検査問題・学校選択問題　大問 4(2)②　改題

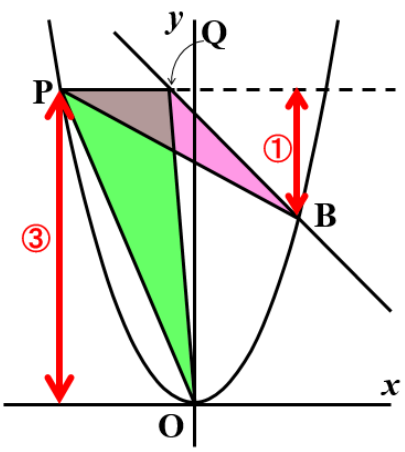


放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に x 座標が -6，4である 2 点 A，B をとり，この 2点を通る直線 l をひきます。直線 l の式は $y=-x+12$ です。放物線上の 2点 A，B 間に点 Pをとり，点Pから x軸と平行な直線をひき，直線 l との交点を点Qとします。

(2)② △BPQ と△OPQ の面積比が1 : 3となる点Q の座標をすべて求めなさい。



［パターン 1・パターン 2］



［パターン 3］

【解説】

△BPQ と△OPQ は辺 PQ が共通です。よって，

公立入試必勝ポイント① より，高さの比を 1:3 にすればよいと分かります。

高さの比が 1:3 になる場合は 3 パターンあります。

（パターン 1）

2 点 P，Q が点 B より下にあり，点 P の x 座標が負の場合

（パターン 2）

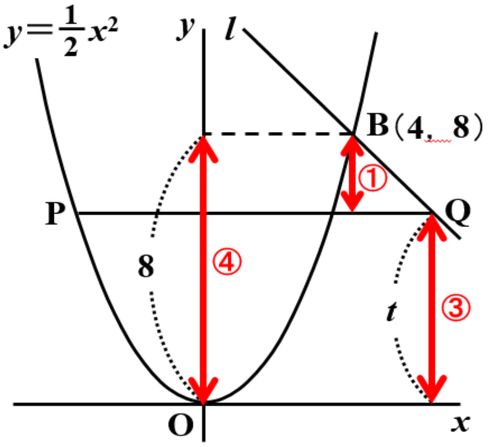
2 点 P，Q が点 B より下にあり，点 P の x 座標が正の場合

（パターン 3）

2 点 P，Q が点 B より上にあり，点 P の x 座標が負の場合

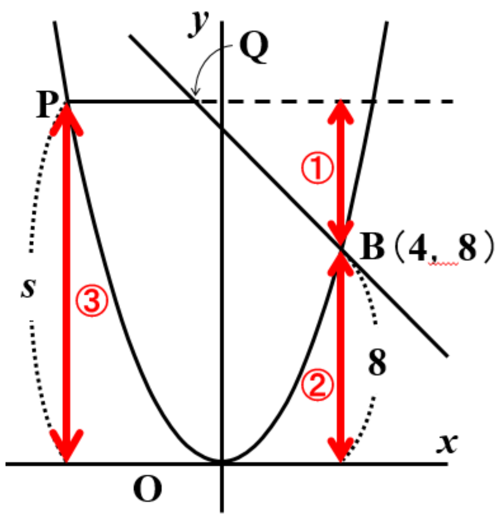
パターン 1・パターン 2 における点 Q の座標は等しいので，パターン 1 とパターン 3 における点 Q の座標をそれぞれ求めます。

まず点 B の y 座標を求めます。
放物線の式 $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入して，
$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$　です。



［パターン 1 の点 Q の座標を求める］

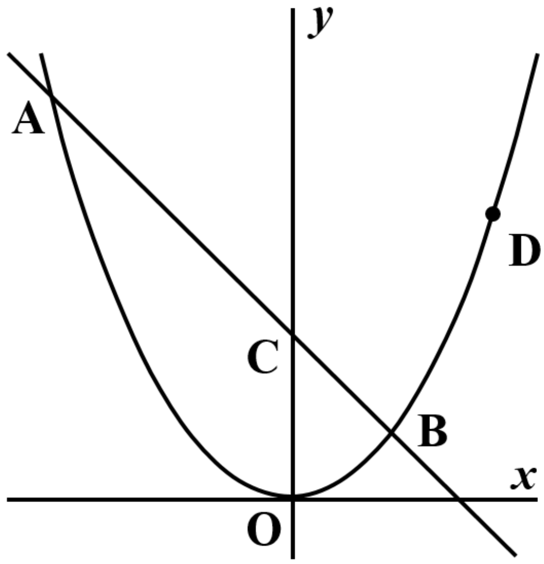
（パターン 1 の場合）
点 Q の y 座標を t とおきます。△BPQ と△OPQ の高さの比が 1:3 なので，点 B の y 座標と点 Q の y 座標の比は 4:3 になります。よって，
$8:t=4:3$
これを解いて，$t=6$ と分かります。この y 座標を直線 l の式 $y=-x+12$ に代入して，
$6=-x+12$
これを解いて，$x=6$ と分かります。よって，点 Q の座標は (6, 6) です。



［パターン 3 の点 Q の座標を求める］

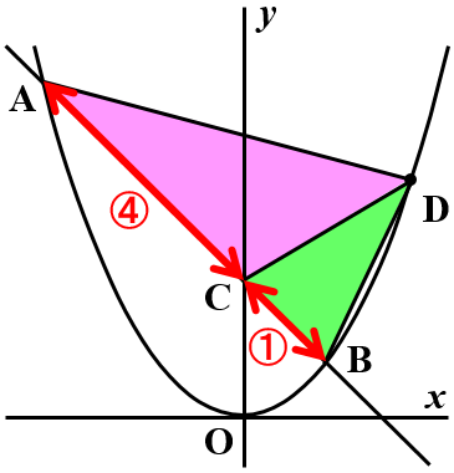
（パターン 3 の場合）
点 Q の y 座標を s とおきます。△BPQ と△OPQ の高さの比が 1:3 なので，点 B の y 座標と点 Q の y 座標の比は 2:3 になります。よって，
$8:s=2:3$
これを解いて，$s=12$ と分かります。この y 座標を直線 l の式 $y=-x+12$ に代入して，
$12=-x+12$
これを解いて，$x=0$ と分かります。よって，点 Q の座標は (0, 12) です。

以上より，点 Q の座標は $\boxed{(6,\ 6),\ (0,\ 12)}$ です。



放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=ax+2$ ($a<0$) との交点を図のようにA，Bとし，直線と y 軸との交点をCとします。また，放物線上に x 座標が3である点 Dをとります。

(2) △ADC の面積が，△CDB の面積の 4 倍になるとき，a の値を求めなさい。



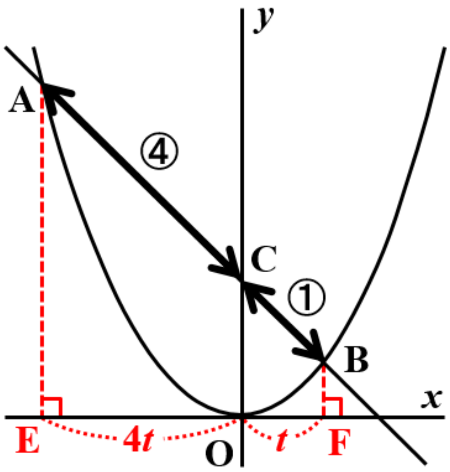
［面積比と底辺の比］

【解説】

△ADC と△CDB は，辺 AC，BC を底辺と見ると高さが共通です。

よって，$\boxed{\text{公立入試必勝ポイント②}}$ より，底辺の比を 4:1 にすればよいと分かります。

線分 AC，BC は軸に平行ではありません。よって，$\boxed{\text{公立入試必勝ポイント③}}$ より軸に垂線を下ろして長さの比を考えます。

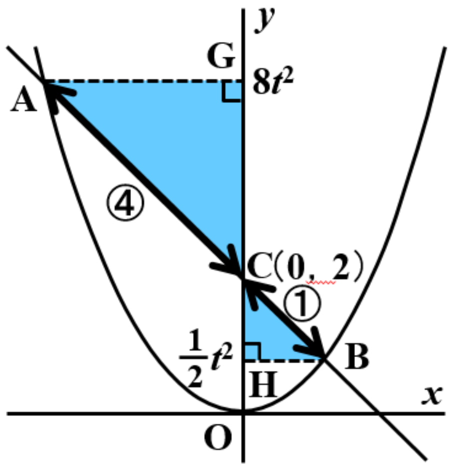


［x 軸に垂線を下ろす］

2 点 A，B からそれぞれ x 軸に垂線 AE，BF を下ろします。AC:BC＝4:1 なので，平行線と線分の比より OE:OF＝4:1 と分かります。よって，点 B の x 座標を t とおくと，点 A の x 座標は $-4t$ と表せます。それぞれ放物線の式 $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，

$y=\frac{1}{2}\times t^2=\frac{1}{2}t^2$ ，$y=\frac{1}{2}\times(-4t)^2=8t^2$

以上より，2 点 A，B の座標はそれぞれ $(-4t, 8t^2)$，$(t, \frac{1}{2}t^2)$と表せます。



［y 軸に垂線を下ろす］

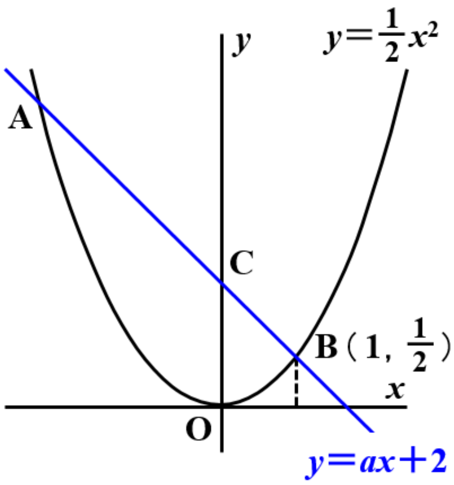
次に，2 点 A，B からそれぞれ y 軸に垂線 AG，BH を下ろします。y 軸上の長さは y 座標の差になるので，

$$\mathrm{GC}=8t^2-2,\ \mathrm{CH}=2-\frac{1}{2}t^2$$

と表せます。△AGC∽△BHC で，相似比は 4 : 1 なので，以下のような比例式が成り立ちます。

$$(8t^2-2):(2-\frac{1}{2}t^2)=4:1$$

これを解くと $t=\pm1$ となりますが，点 B の x 座標は正なので，$t=1$ です。点 B の y 座標は $\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$ なので，点 B の座標は $(1,\ \frac{1}{2})$ と分かります。



［a の値を求める］

直線 AB の式 $y=ax+2$ に，点 B の座標 $(1,\ \frac{1}{2})$ を代入します。

$$\frac{1}{2}=a+2$$

これを解いて，$\boxed{a=-\frac{3}{2}}$ です。