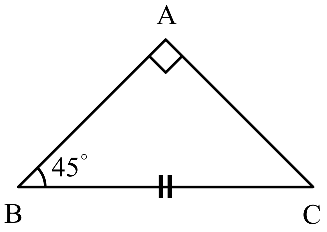
【類題 1】

下の図 1 のような，斜辺の長さの等しい 1 組の三角定規があります。この 1 組の三角定規を，図 2 のように辺 BC と辺 EF が重なるように置き，線分 AD を書きます。このとき，∠DAC の大きさを求めなさい。



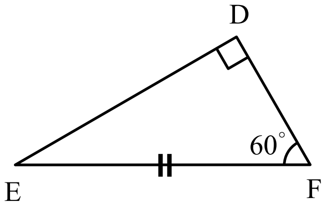


図 1

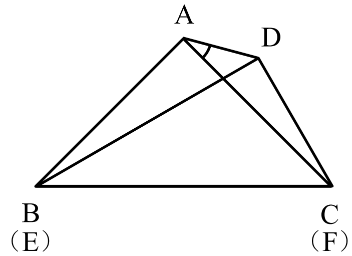
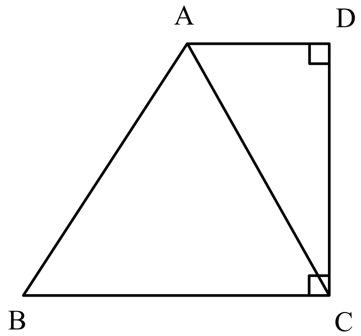


図 2

【類題 2】

右の図のように，∠C＝∠D＝90°である四角形 ABCD があります。辺 AB 上に，∠APD＝∠ACD となるような点 P をとります。この点 P を作図によって求めなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



【類題 3】

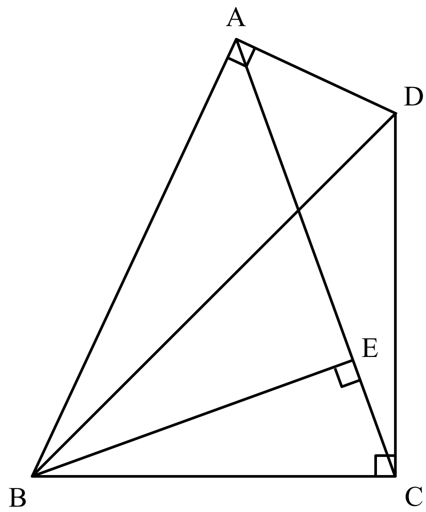
∠A＝∠C＝90°である四角形 ABCD があり，AD＝2cm，BC＝CD＝4cm です。これについて，次の各問いに答えなさい。

(1) 辺 AB の長さを求めなさい。

(2) 線分 AC を引き，点 B から対角線 AC に垂線 BE を引きます。このとき，次の①，②に答えなさい。

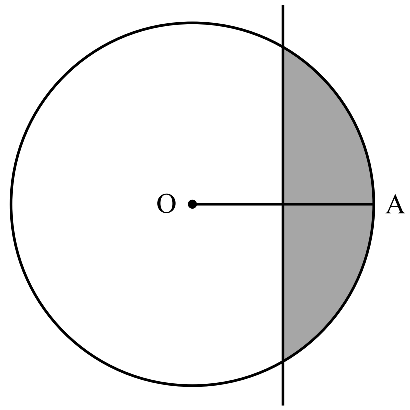
① △ABD と△EBC が相似であることを証明しなさい。

② 線分 AC の長さを求めなさい。



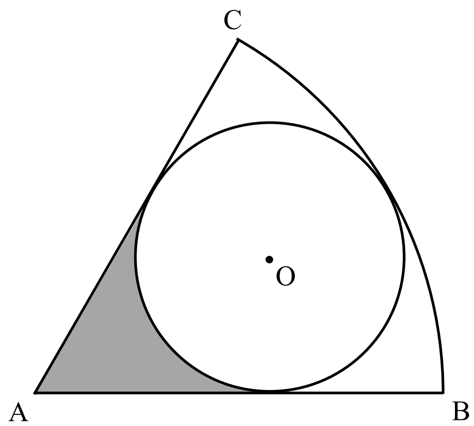
【類題 4】

右の図は，線分 OA を半径とする円 O と，線分 OA の垂直二等分線をかいたものです。OA＝4cm のとき，図のかげ( )をつけた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率を π とします。



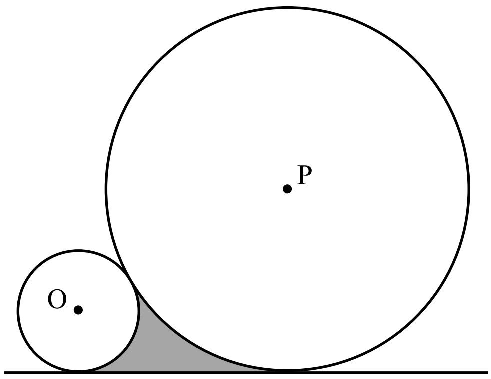
【類題 5】

右の図は，半径 6cm のおうぎ形 ABC の中に半径 2cm の円 O をかいたものです。円 O は線分 AB，AC と弧 BC に接しています。このとき，図のかげ( )をつけた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率を π とします。



【類題 6】

右の図は，半径 2cm の円 O と半径 6cm の円 P を接するようにかき，2 つの円に接する直線を引いたものです。このとき，図のかげ( )をつけた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率を π とします。

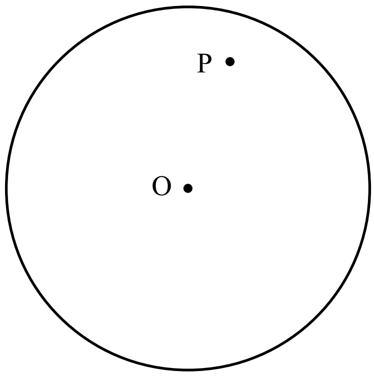


【類題　7】

長方形 ABCD を，点 A が辺 BC 上にくるように，点 D を通る直線で折り返します。このときの折り目となる直線を，作図によって求めなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。

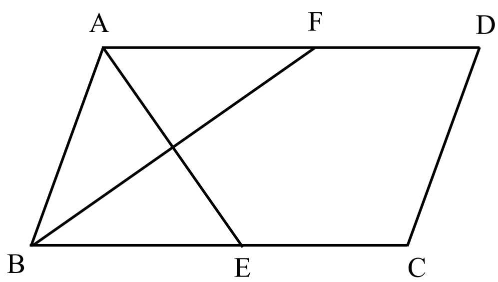
【類題　8】

右の図のように，円 O の内側に点 P があります。この円 O を点 P を通る直線で折り返し，折った部分の弧が点 O を通るようにします。このときの折り目となる直線を，作図によって求めなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



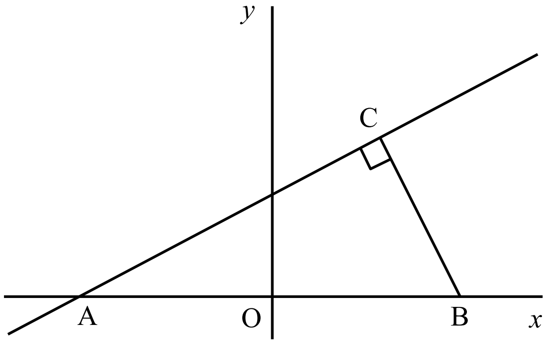
【類題　9】

平行四辺形 ABCD において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を E，∠B の二等分線と辺 AD との交点を F とします。この平行四辺形 ABCD を線分 AE を折り目として折ったとき，点 B は点 F に重なります。その理由を説明しなさい。



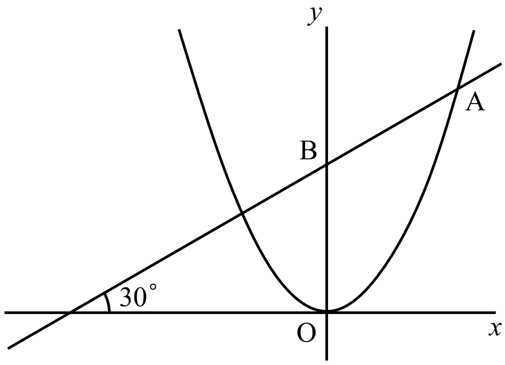
【類題　10】

x 軸上に，x 座標が－5 である点 A と x 座標が 5 である点 B をとります。x 座標，y 座標がともに正である点 C をとり，$\angle C = 90^\circ$ となる△ABC を作ったところ，△ABC の面積が 20cm^2 になりました。このとき，直線 AC の式を求めなさい。ただし，座標の 1 目盛りを 1cm とします。



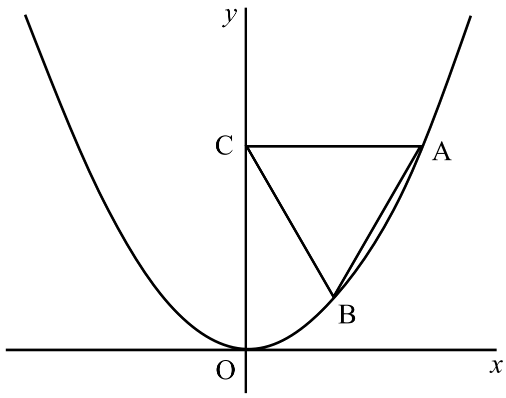
【類題　11】

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に，x 座標が正である点 A をとります。点 A を通り x 軸と 30° で交わる傾きが正の直線を引き，この直線と y 軸との交点を B とすると，OB＝AB となりました。このとき，点 A の座標を求めなさい。



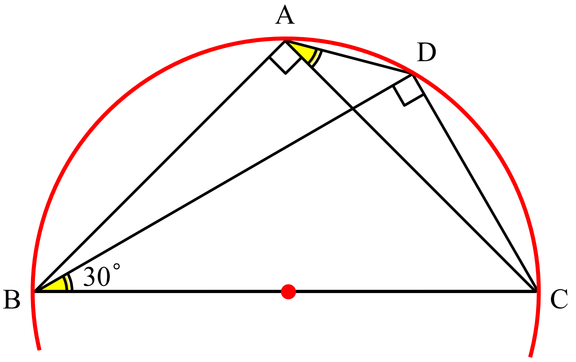
【類題　12】

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に，x 座標が正である 2 点 A，B をとります。ただし，点 A は点 B より右側にあるものとします。点 A から y 軸に垂線 AC を引いたところ，△ABC が正三角形になりました。このとき，点 A の座標を求めなさい。



数学 類題にチャレンジ 〔隠れた直角・円 解答編〕

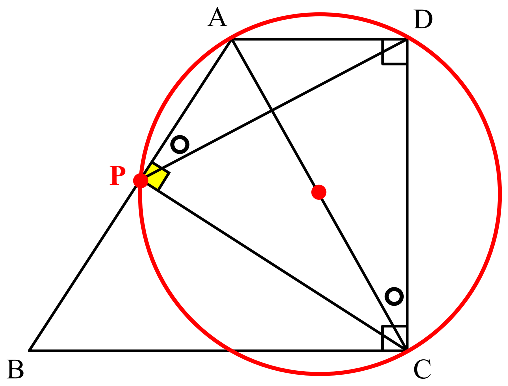
【類題 1】



直角三角形は斜辺を直径とする円に内接するので，2 点 A，D はともに**線分 BC を直径とする円**の周上にあります。弧 CD に対する円周角だから，∠DAC＝∠DBC が成り立ちます。

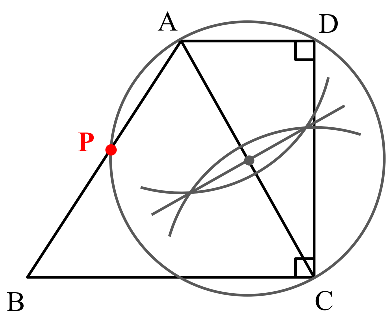
したがって，∠DAC＝ $\boxed{30^\circ}$ です。

【類題 2】

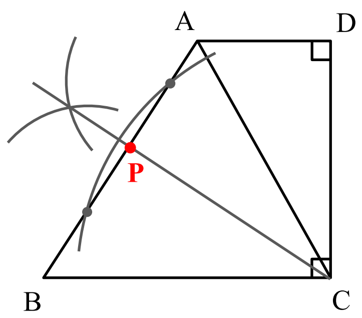


∠APD＝∠ACD となる点 P をとると，円周角の定理の逆より 4 点 A，P，C，D は同一円周上にあります。さらに∠ADC＝90°だから，この円は**線分 AC を直径とする円**です。したがって，AC の中点をとり，線分 AC を直径とする円をかき，線分 AB との交点を P とすればよいです（解答例 1）。

また線分 AC が直径だから，∠APC＝90°となります。したがって，点 C から線分 AB に垂線を引き，線分 AB との交点を P としてもよいです（解答例 2）。



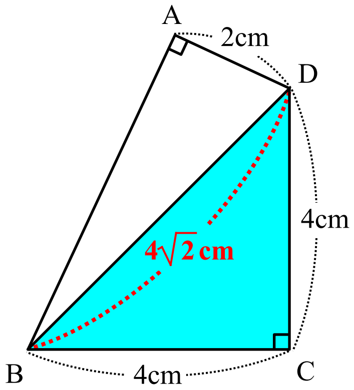
解答例 1



解答例 2

【類 題 3】

(1)



△BCD は直角二等辺三角形だから，3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ です。BC＝4cm だから，

$4:\mathrm{BD}=1:\sqrt{2}$

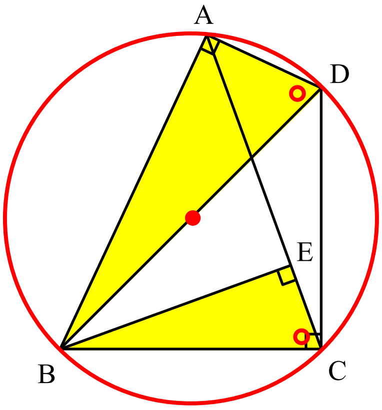
が成り立ちます。これを解いて，**BD＝$4\sqrt{2}$ cm** と分かります。

次に，△ABD で三平方の定理を用いて

$2^2+\mathrm{AB}^2=(4\sqrt{2})^2$

が成り立ちます。これを解いて，AB＝ $\boxed{2\sqrt{7}\,\mathrm{cm}}$ です。

(2)①



△ABD，△BCD はどちらも線分 BD を斜辺とする直角三角形です。よって，2 点 A，C は**線分 BD を直径とする円**の周上にあります。この円で円周角の定理を用いることで，∠ADB＝∠ECB を示すことができます。

〔解答例〕

△ABD と△EBC において，

仮定より，∠BAD＝∠BEC＝90° …①

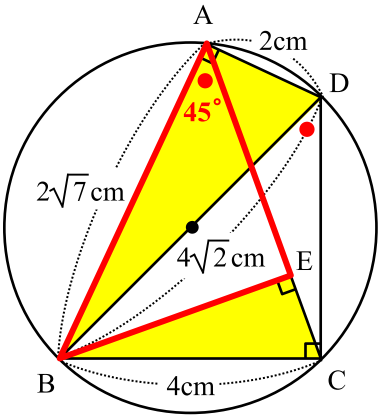
∠BAD＝∠BCD＝90°より，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。この円において，弧 AB に対する円周角だから，

∠ADB＝∠ECB …②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので

△ABD∽△EBC

(2)②



△ABD∽△EBC で，対応する辺の比は等しいので，

$\mathrm{BE}:2\sqrt{7}=4:4\sqrt{2}$ ，$\mathrm{CE}:2=4:4\sqrt{2}$

が成り立ちます。それぞれ解いて，BE＝$\sqrt{14}$ cm，CE＝$\sqrt{2}$ cm と求められます。

ここで，

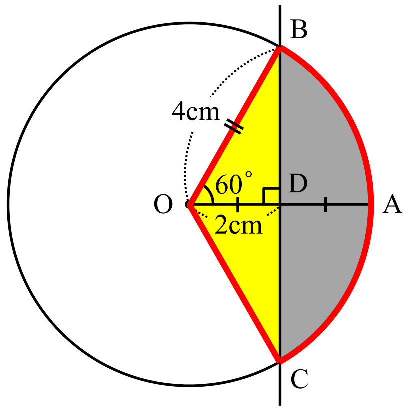
∠AEB＝90° （仮定）

∠BAE＝∠BDC＝45° （弧 BC に対する円周角）

より，**△ABE は直角二等辺三角形**です。したがって，AE＝BE＝$\sqrt{14}$ cm と分かります。

以上より，線分 AC の長さは $\boxed{\sqrt{14}+\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})}$ です。

【類題 4】



図のように，交点をそれぞれ B，C，D とします。
求める面積は，　**おうぎ形 OBC**－**△OBC**　と表せます。

△OBD において，OB＝4cm，OD＝2cm，∠ODB＝90°です。
このとき，OD:OB＝1:2 だから，∠BOD＝60°で，△OBD の 3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ と分かります。したがって，BD＝$2\sqrt{3}$cm　です。
△OBD≡△OCD だから，**△OBC** の面積は

$$\left(2\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)\times 2=4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$

と求められます。

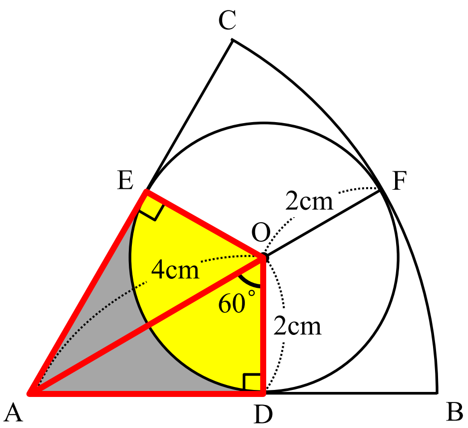
次に，**おうぎ形 OBC** の中心角は 60×2＝120°だから，面積は

$$4^2\pi\times\frac{120}{360}=\frac{16}{3}\pi\ \mathrm{cm}^2$$

と求められます。

以上より，求める面積は $\boxed{\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)}$ です。

【類題 5】



図のように，接点をそれぞれ D，E，F とします。
求める面積は，**四角形 ADOC**－**おうぎ形 ODE** と表せます。

△OAD において，OA＝4cm，OD＝2cm，∠ODA＝90°です。
このとき，OD:OA＝1:2 だから，∠AOD＝60°で，△OAD の 3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ と分かります。したがって，　AD＝$2\sqrt{3}$cm　です。
△OAD≡△OAE だから，**四角形 ADOC** の面積は

$$\left(2\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}\right)\times 2=4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$

と求められます。

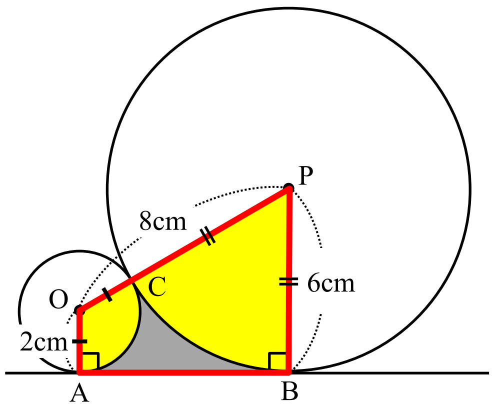
次に，**おうぎ形 ODE** の中心角は 60×2＝120°だから，面積は

$$2^2\pi\times\frac{120}{360}=\frac{4}{3}\pi\ \mathrm{cm}^2$$

と求められます。

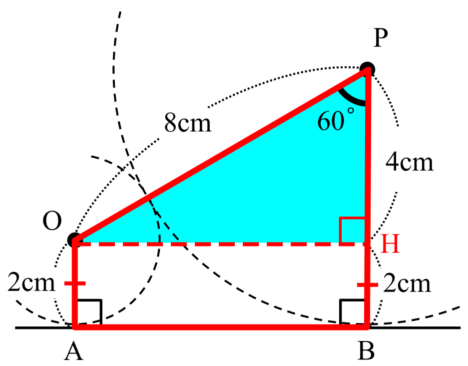
以上より，求める面積は $\boxed{4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^2)}$ です。

【類 題 6】



図のように，接点をそれぞれ A，B，C とします。
求める面積は，**四角形 OABP** からおうぎ形 OAC と
おうぎ形 PBC を除いたものです。

四角形 OABP について，OA＝2cm，PB＝6cm，OP＝8cm
です。また，接線の性質より∠OAB＝∠PBA＝90°です。



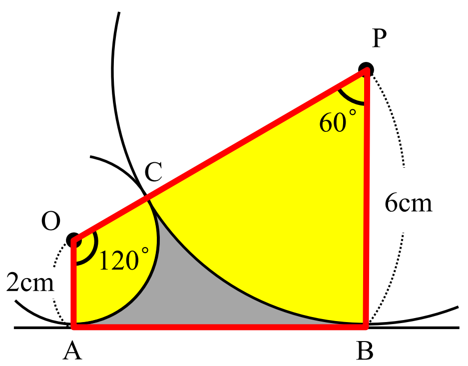
点 O から線分 PB に引いた垂線を OH とします。
HB＝OA＝2cm だから，PH＝6－2＝4cm です。
このとき△POH において，PH : PO＝1 : 2 だから，

$\angle OPH = 60^\circ$，$OH = 4\sqrt{3}$ cm

と分かります。**四角形 OABP** は台形だから，面積は

$(2+6)\times 4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

と求められます。



次に，おうぎ形 PBC の中心角は 60°だから，面積は

$6^2\pi\times\dfrac{60}{360} = 6\pi\,\text{cm}^2$

おうぎ形 OAC の中心角は 120°だから，面積は

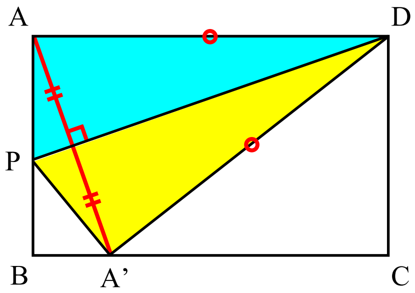
$2^2\pi\times\dfrac{120}{360} = \dfrac{4}{3}\pi\,\text{cm}^2$

と求められます。

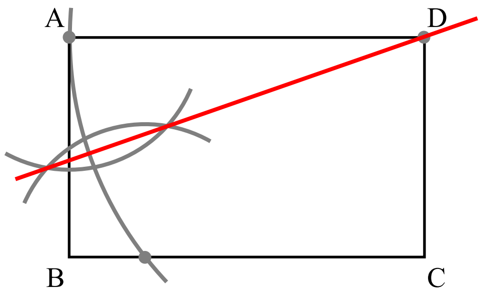
以上より，求める面積は

$16\sqrt{3} - \left(6\pi + \dfrac{4}{3}\pi\right) = \boxed{16\sqrt{3} - \dfrac{22}{3}\pi\ (\text{cm}^2)}$ です。

【類題 7】

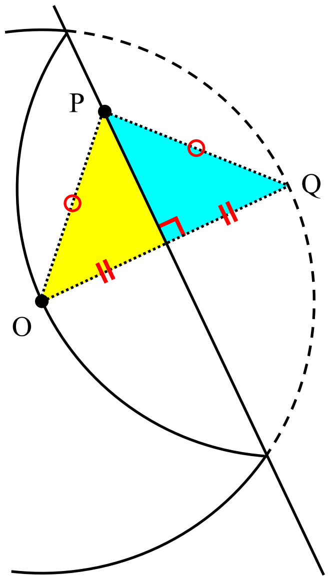


折り目を DP とし，折ったときに点 A が移る点を A'とします。
折り目は線分 AA’の垂直二等分線になります。
また，折った部分は元の部分と合同だから，**DA’＝DA** です。
したがって，DA’＝DA となる点 A’をとり，線分 AA’の垂直二等分線を引けばよいと分かります。

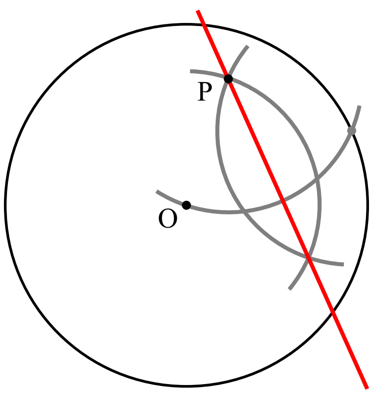


解答例

【類題 8】

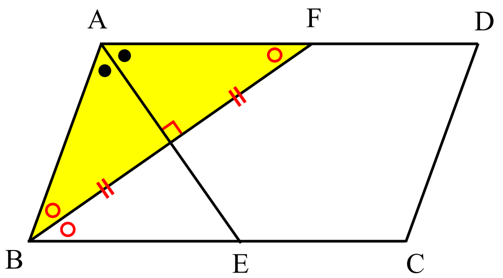


折ったときに点 O に重なる点を Q とします。
折り目は線分 OQ の垂直二等分線になります。
また，折った部分は元の部分と合同だから，**OP＝QP** です。
したがって，OP＝QP となる点 Q をとり，線分 OQ の垂直二等分線を引けばよいと分かります。



解答例

【類 題 9】



「折り目は垂直二等分線」だから，**直線 AE が線分 BF の垂直二等分線になる**ことを示せばよいです。

△ABF に注目すると，

∠ABF＝∠EBF（仮定）

∠EBF＝∠AFB（平行線の錯角）

より，**∠ABF＝∠AFB** です。よって，△ABF は二等辺三角形です。二等辺三角形の頂角の二等分線は対辺を垂直に二等分するので，直線 AE は線分 BF の垂直二等分線です。

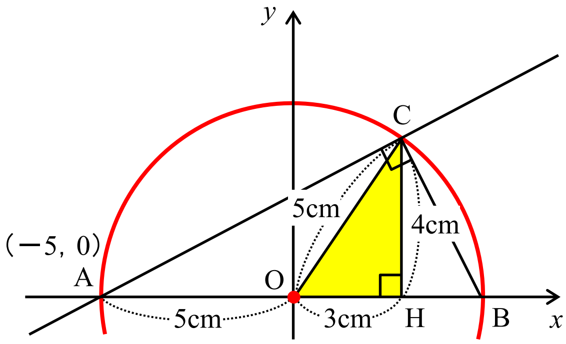
〔解答例〕

∠ABF＝∠EBF＝∠AFB より，△ABF は二等辺三角形。

直線 AE は頂角の二等分線だから，対辺 BF の垂直二等分線。

よって，直線 AE で折ると点 B と点 F が重なる。

【類題 10】



点 C から x 軸に引いた垂線を CH とします。
AB＝10cm，△ABC＝20cm^2 より，

$$10 \times CH \times \frac{1}{2} = 20$$

が成り立ちます。これを解いて，CH＝4cm と分かります。∠ACB＝90°より，点 C は**線分 AB を直径とする円**の円周上にあります。この円の中心は点 O で，半径は 5cm だから，OC＝5cm です。

△OCH で三平方の定理を用いて，

$$OH^2 + 4^2 = 5^2$$

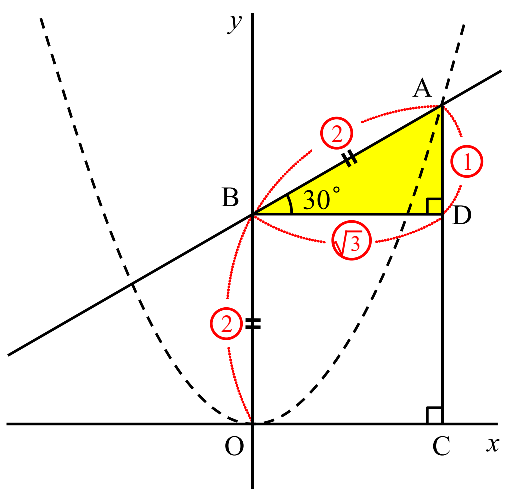
が成り立ちます。これを解いて，OH＝3cm と分かります。

以上より，点 C の座標は(3，4)です。点 A の座標は(−5，0)だから，直線 AC の式を $y=ax+b$ とおき，2 点の座標をそれぞれ代入することで，次のような連立方程式を得られます。

$$\begin{cases} 4=3a+b \\ 0=-5a+b \end{cases}$$

これを解いて，$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{5}{2}$ と分かります。したがって，直線 AC の式は $\boxed{y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$ です。

【類題 11】



図のように垂線 AC，BD を引きます。
∠ABD＝30°となるので，△ABD の 3 辺の比は **1 : 2 : $\sqrt{3}$** です。さらに OB＝AB だから，

$$OC:AC=\sqrt{3}:(2+1)=\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$$

と分かります。
点 A の x 座標を t とおくと，y 座標は $\frac{1}{2}t^2$ と表せます。
これと $OC:AC=1:\sqrt{3}$ より，

$$t : \frac{1}{2}t^2 = 1:\sqrt{3}$$

これを解いて($t>0$ に注意)，$t=2\sqrt{3}$ と分かります。
このとき，y 座標は $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2=6$ です。
以上より，求める座標は $\boxed{(2\sqrt{3},\ 6)}$ です。

SAIEI サイエイスクール SCHOOL

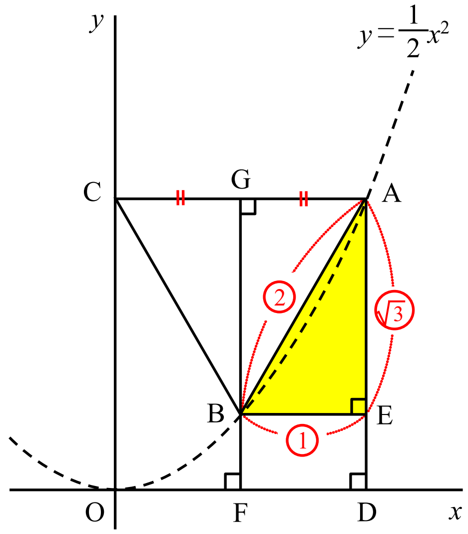
【類 題　12】

関数 $y=ax^2$ において，x が p から q まで増加したときの変化の割合を考えます。

$x=p$ のとき $y=ap^2$，$x=q$ のとき $y=aq^2$ と表せるため，変化の割合は

$$\frac{ap^2-aq^2}{p-q}=\frac{a(p+q)(p-q)}{p-q}=a(p+q)\quad\cdots\text{【公式＊】}$$

と表すことができます。



左の図のように垂線を引き，交点をそれぞれ D，E，F，G とします。△ABC は正三角形だから，**点 G は線分 AC の中点**です。

∠ABE＝60°となるので，△ABE の 3 辺の比は **1 : 2 : $\sqrt{3}$** です。特に BE:AE＝1:$\sqrt{3}$ だから，直線 AB の傾きは

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

と分かります。

点 B の x 座標を t とおくと，CA＝2CG だから，点 A の x 座標は $2t$ と表せます。直線 AB の傾き（AB 間の変化の割合）は $\sqrt{3}$ だから，**【公式＊】**を用いて次のような方程式を得られます。

$$\frac{1}{2}(t+2t)=\sqrt{3}$$

これを解いて，$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ と分かります。

このとき，点 A の x 座標は $2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ だから，

$y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して

$$y=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$$

以上より，求める座標は $\boxed{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{8}{3}\right)}$ です。